eman ta zabal zazu
UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

Escuela Universitaria de Estudios Empresariales
Enpresa-Ikasketen Unibertsitate Eskola
San Sebastián-Donostia

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

PRIMER EXAMEN PARCIAL. (12-II-96)

Apellidos.., Nombre.................... . Grupo.....

Instrucciones:

El examen consta de dos partes.

En la parte I se plantean una serie de cuestiones. En cada caso sólo una de las respuestas es correcta. Marcarla y justificarla brevemente en el espacio en blanco que se ha dejado a continuación de cada cuestión. Sólo se pasará a evaluar la justificación en el caso de que se haya marcado la respuesta correcta. (Las respuestas incorrectas no se penalizan).

Cada cuestión vale un punto, y los problemas de la parte II valen: 3 puntos el primero y 2 puntos el segundo.

Duración del examen 2 horas.

PARTE I : CUESTIONES

1. El conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \leq -2\}$, es:

   ☐ (a) Abierto y convexo

   ☐ (b)Compacto y no convexo

   ☐ (c) Cerrado y no convexo

   ☐ (d)Convexo y no acotado

   (razonarlo gráficamente y analíticamente)

2. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

☐ (a) $f\ (x,y)$ sólo es discontinua en (0,0).
☐ (b) $f\ (x,y)$ presenta varios puntos de discontinuidad.
☐ (c) Es continua en R^2.
☐ (d) Ninguna de las respuestas anteriores.

3. Si un campo escalar $f(\vec{x})$ posee todas las derivadas direccionales en un punto $\vec{x}^o$, entonces:

☐ (a) f es continua en $\vec{x}^o$.
☐ (b) f es diferenciable en $\vec{x}^o$.
☐ (c) No sabemos si es continua.
☐ (d) No sabemos si es continua ni tampoco si está definida en $\vec{x}^o$.

4. Si $f(\vec{x})$ y $g(\vec{x})$ son dos funciones homogéneas de grado m y m' respectivamente y α y β son números reales, entonces $\alpha f(\vec{x})+\ \beta g(\vec{x})$ es una función :

□ (a) Homogénea de grado $m+m'$.
□ (b) Homogénea de grado $m\cdot m'$.
□ (c) Solo es homogénea si $m=m'$
□ (d) En ningún caso es homogénea.

5. Sea $f(x,y)=\dfrac{1}{12}x^4+y^2+2xy$

□ (a) f es convexa en todo R^2.
□ (b) f es convexa en $\{(x,y)\in R^2 \mid |x|\geq\sqrt{2}\}$.
□ (c) f nunca es convexa.

PARTE II : PROBLEMAS

1) Dada la ecuación $x^2 + 2xyz - z^2 = 1$.

a) Decir si podemos asegurar que en una bola del punto $(x,y,z)=(1,1,2)$, define una función implícita $z=f(x,y)$.

b) Hacer una aproximación lineal de $f(x,y)$, en el punto $(x,y)=(1,1)$.

c) ¿Qué podemos decir sobre la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el punto $(1,1)$?.

d) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en el punto mencionado.

2) Sea el siguiente programa matemático:

$$\max\ 2x_1 + x_2$$

$$s.a.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) ¿Es un programa convexo?.

b) Resolverlo.

c) Analizar lo que ocurre en los puntos $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$

7 El determinante de la matriz hessiana de la función $z = x^2y + xy^2$ es una forma cuadrática cuya matriz asociada es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

8 La función $f(x,y) = x^2y + x$ es:

a) convexa para $y > 0$ e indefinida para $y < 0$

b) convexa para $y > 0$, y cóncava para $y < 0$

c) convexa en todo R^2

d) convexa para $x > 0$ y cóncava para $x < 0$

9 La función $f(x,y) = x^3y + x$ es:

a) convexa cuando x e y tienen el mismo signo, y cóncava en caso contrario

b) cóncava cuando x e y tienen el mismo signo, y convexa en caso contrario

c) estrictamente convexa en todo R^2

d) estrictamente cóncava en todo R^2

① resolver el siguiente progr. matemático (max)

② ¿Es un programa convexo? ¿Por qué?

③ ~~Verificar~~ ¿Qué ocurre en los pts $(\sqrt{2},0)$ y $(0,\sqrt{2})$?

$2x_1 + x_2$

$\frac{dx_2}{dx_1} =$ $x_1^2 + x_2^2$





$\frac{x_1}{x_2}$

(2, 1)

(*) 1 Sean $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 5\leq x_1\leq 7,\ 5<x_2<7\}$; $\varepsilon = 1/2$; $\vec{x}_0=(x_1^0, x_2^0)=(7,7)$.

¿Cuál de las siguientes implicaciones es cierta?

a) $B_\varepsilon(\vec{x}_0)\cap A=\emptyset \Rightarrow \vec{x}_0\in int(A)$

b) $\left.\begin{array}{l} B_\varepsilon(\vec{x}_0)\cap A\neq\emptyset \\ B_\varepsilon(\vec{x}_0)\cap A^c\neq\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_0\in fr(A)$

c) $B_\varepsilon(\vec{x}_0)\not\subset A^c \Rightarrow$ ~~$\vec{x}_0\in ext(A)$~~ $\vec{x}_0\in A$

d) $\left.\begin{array}{l} B_\varepsilon(\vec{x}_0)\subset A \\ B_\varepsilon(\vec{x}_0)\subset A^c \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_0\in fr(A)$

2 Un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$:

a) contiene a todos sus puntos frontera

b) contiene a sus puntos frontera si son también puntos interiores

c) contiene a todos sus puntos interiores, pero no a los puntos frontera

d) contiene a sus puntos interiores que pertenecen a la frontera del conjunto.

→ 3 Sea $f(x,y)=\begin{cases} x/y^2 & \text{si } y\neq 0 \\ -3 & \text{si } y=0 \end{cases}$. Entonces:

a) f es continua en todo su dominio

b) f no es continua en el punto $(0,-3)$

c) f no es continua en el origen

d) las tres respuestas anteriores son falsas

4 Si $\varphi(x,y,z)=K$ define implícitamente una función $z=g(x,y)$ en un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0)$, entonces:

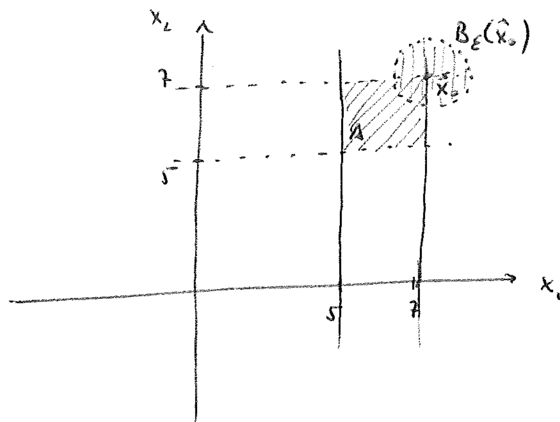
a) $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$ en todo $\mathbb{R}^3$

b) $\nexists\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ en el punto P

c) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\neq 0$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0$ en el punto P

d) $\lim_{(x,y,z)\to P} \varphi(x,y,z)=K$

1.-



b)

2.- c)

3.- $E = \mathbb{R}^2$, f no continua en $(x, y), y = 0$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{x}{y^2} = \infty \\ f(x_0, 0) = 3\end{array}\right\}$ c)

4.- d) : φ ha de ser continua en torno a P

5.- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ $\quad \nabla f(\vec{x}) = (x_2 x_3 \;\; x_1 x_3 \;\; x_1 x_2)$ $\quad Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(1,1,1) = 1$ $\quad \nabla f(1,1,1) = (1 \;\; 1 \;\; 1)$ $\quad Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(\vec{x}) \simeq 1 + (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1 - 1,\; x_2 - 1 \;\; x_3 - 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} =$$

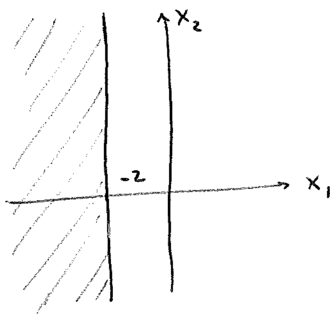
$$= 1 + (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + \frac{1}{2}\left[2(x_1 - 1)(x_2 - 1) + 2(x_1 - 1)(x_3 - 1) + 2(x_2 - 1)(x_3 - 1)\right] =$$

$$= 1 + x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 + x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 + x_1 x_3 - x_1 - x_3 + 1 + x_2 x_3 - x_2 - x_3 + 1 =$$

$$= 1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

a)

6.-



d)

7.- d)

8.- $y = x_1^4 + x_2^4$ $\quad \nabla y = (4x_1^3 \;\; 4x_2^3)$ $\quad Hy = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ b)

y : estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}^2$

9.- c)

Sea $f(x,y)=\begin{cases} x/y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ -3 & \text{si } y = 0 \end{cases}$. Entonces:

a) f es continua en todo su dominio

b) f no es continua en el punto (0,-3)

c) f no es continua en el origen

d) las tres respuestas anteriores son falsas

Dada la función $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, su aproximación cuadrática en un entorno del punto (1,1,1) es:

a) $f(x_1,x_2,x_3) \approx 1-x_1-x_2-x_3+x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3$

b) $f(x_1,x_2,x_3) \approx 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

c) $f(x_1,x_2,x_3) \approx 1-x_1 \cdot x_2-x_1 \cdot x_3-x_2 \cdot x_3$

d) $f(x_1,x_2,x_3) \approx 1+x_1+x_2+x_3-x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

El conjunto $A=\{(x_1,x_2) \in R^2 \ / \ x_1 \leq -2\}$ es:

a) abierto y convexo

b) compacto y no convexo

c) cerrado y no convexo

d) convexo y no acotado

Sea la función $y=f(\vec{x})$ definida en $D \subset R^n$, y el punto $\vec{x}_0 \in E$ tal que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$, $\forall \vec{x} \in D$ $(\vec{x} \neq \vec{x}_0)$. Entonces:

a) $\vec{x}_0$ es un máximo global, pero no local

b) $\vec{x}_0$ es un máximo local, pero no global

c) $\vec{x}_0$ es un máximo local y global

d) $\vec{x}_0$ no es máximo local ni global

~~El determinante de la~~

El determinante de la matriz hessiana de la función $z = x^2y + xy^2$ es una forma cuadrática cuya matriz asociada es:

a) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

ENPRESA-MATEMATIKAK Ekuazioak diferentzia finitutan

Diferentzia finitutan dauden ondoko ekuazioak ebatzi:

1.- $6y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 0$; $y_0 = 0$ eta $y_1 = 2$ direnean

2.- $y_{t+4} - 2y_{t+3} + 2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

3.- $y_{t+3} - 7y_{t+2} + 16y_{t+1} - 12y_t = 2^t$

4.- $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 16y_t = t^2 + t + 1$; $y_0 = 1$ eta $y_1 = 6$ direnean

5.- $y_{t+4} - 16y_t = 2$

6.- $2y_{t+1} = 3y_t + 2 \cdot 3^t$; $y_0 = 2$ dela jakinik

Emaitzak:

1.- $y_t = \frac{1}{2^{t-1}} + \frac{1}{3^{t-1}}$

2.- $y_t = C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{2} + C_4 \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{2}$

3.- $y_t = C_1 \cdot 3^t + (C_2 + C_3 \cdot t) \cdot 2^t - \frac{t^2}{8} \cdot 2^t$

4.- $y_t = -8 \cdot 2^t + \frac{21}{4} \cdot 3^t + \frac{1}{2} \cdot t^2 + 2t + \frac{15}{4}$

5.- $y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot (-2)^t + 2^t \cdot \left(C_3 \cdot \cos\frac{\pi t}{2} + C_4 \cdot \sin\frac{\pi t}{2}\right) + 18$

6.- $y_t = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + \frac{2}{3} \cdot 3^t$